ISSN: 2952–0746

# Retos Matemáticos

10 de septiembre de 2025

**Ejercicio:** Esto es un ejemplo de un enunciado propuesto. Cabe la posibilidad de que el enunciado tenga varios apartados:

*a*) Apartado 1º (puede ir referenciado).

*b*) Apartado 2º (puede ir referenciado).

Propuesto por Menganito Flautas.

Respecto al enunciado, en caso de que el texto debiera ir acompañado de alguna figura/imagen (situada a la derecha del mismo), se recomienda utilizar el siguiente código:

```
\begin{cajaejercicio}
        \begin{wrapfigure}{r}{50mm}
                \textbf{Ejercicio:} Este es el enunciado ...
        \end{wrapfigure}
\end{cajaejercicio}

{\sf\color{verdeodi}Propuesto por Menganito Flautas.}
```

## 1ª Forma

Vamos a considerar resolver el problema mediante geometría analítica y optimización de la función «suma de áreas de los triángulos sombreados».

Si consideramos un sistema de ejes cartesianos centrados en el punto $A$, y se tiene en cuenta para nuestros cálculos que el cuadrado representado en la figura del enunciado propuesto es de lado unidad (posteriormente se aplicará un factor de escala), se tienen las rectas $BD$ y $AP$ que se cortan en el punto $E$, cuyas coordenadas se obtendrán de resolver el sistema de ecuaciones de dichas rectas. Consideramos por lo tanto que el punto $P = (a, 1)$ (véase la figura 1). El sistema a resolver será:

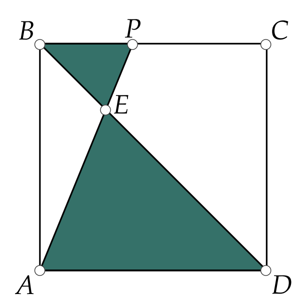


Figura 1

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ y = \dfrac{x}{a}, \quad 0 \le a \le 1. \end{cases}$$

ISSN: 2952–0746; 10 de septiembre de 2025

Entonces

$$x + \frac{x}{a} = 1 \implies x = \frac{a}{a+1} \implies y = \frac{1}{a+1} \implies E = \left(\frac{a}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right).$$

Consideramos a continuación la función $f(a)$ «suma de las áreas de los triángulos $EPB$ y $EAB$». Entonces

$$f(a) = A_{\triangle EAB} + A_{\triangle EPB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{a+1}\right) = \frac{a^2+1}{2(a+1)}.$$

Optimizamos la función $f(a)$:

$$f'(a) = \frac{2a\big(2(a+1)\big) - 2(a^2+1)}{4(a+1)^2} = \frac{a^2+2a-1}{2(a+1)^2},$$

entonces

$$f'(a) = 0 \iff a^2+2a-1 = 0 \implies a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \implies \begin{cases} a = -1-\sqrt{2} \Rightarrow \text{No vale,} \\ a = \sqrt{2}-1. \end{cases}$$

Puede comprobarse que dicho extremo relativo de la función $f\left(\sqrt{2}-1\right)$ es un mínimo:

$$f''(a) = \frac{3a^2+6a+7}{4(a+1)^4} \implies f''\left(\sqrt{2}-1\right) > 0 \implies f(a)_{\text{mín}} \iff a = \sqrt{2}-1.$$

Luego $AB + BP = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$. Pero no hemos aplicado el factor de escala al que hacíamos referencia al principio de nuestra resolución, resultando

$$A_{\square ABCD} = 72 \text{ m}^2 \implies AB = BC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ m}.$$

$$\boxed{AB + BP = \sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12 \text{ m}}$$

*a*) La fórmula propuesta en el enunciado es la conocida como *identidad de Candido* y se puede comprobar desarrollando cada miembro por separado y viendo que coinciden. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^2 &= \left(x^2+y^2\right)^2 + (x+y)^4 + 2\left(x^2+y^2\right)(x+y)^2 \\
&= \underbrace{x^4+y^4+2x^2y^2}+\underbrace{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}+2\left(x^2+y^2\right)(x+y)^2 \\
&= 2x^4+2y^4+8x^2y^2+4x^3y+4xy^3+2\left(x^4+x^2y^2+2x^3y+x^2y^2+y^4+2xy^3\right) \\
&= 2(2x^4+2y^4+6x^2y^2+4x^3y+4xy^3) \\
&= 2(x^4+y^4+\underbrace{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}) \\
&= 2\left(x^4+y^4+(x+y)^4\right).
\end{aligned}$$

□

ISSN: 2952–0746; 10 de septiembre de 2025

*b*) Aplicando la identidad anterior con $x = 23$ e $y = 87$, todo se reduce a calcular los cuadrados de 23, 87 y de $23 + 87 = 110$ y echar unas sencillas cuentas que pueden hacerse a mano:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{23^4+87^4+110^4}{2}} &= \sqrt{\frac{2\cdot\left(23^4+87^4+110^4\right)}{4}} = \frac{\sqrt{\left(23^2+87^2+110^2\right)^2}}{2}\\ &= \frac{529+7\,569+12\,100}{2} = \frac{20\,198}{2} = 10\,099.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\sqrt{\frac{23^4+87^4+110^4}{2}} = 10\,099}$$

## 2ª Forma

*a*) Este resultado puede demostrarse fácilmente expandiendo ambas expresiones y verificando que son idénticas:

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^2 = \left(2x^2+2y^2+2xy\right)^2 &= 4x^4+4y^4+12x^2y^2+8x^3y+8xy^3\\ &= 2(x^4+y^4+(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4))\\ &= 2(x^4+y^4+(x+y)^4).\end{aligned}$$

*b*) Y el segundo apartado no es sino un corolario de lo anterior:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{23^4+87^4+110^4}{2}} &= \sqrt{\frac{2(23^4+87^4+(23+87)^4)}{4}} \overset{\text{a)}}{=} \sqrt{\frac{\left(23^2+87^2+110^2\right)^2}{4}}\\ &= \frac{23^2+87^2+110^2}{2} = \frac{(2\cdot 11+1)^2+(2\cdot 43+1)^2+(2\cdot 55)^2}{2}\\ &= 2(11^2+43^2+55^2)+109.\end{aligned}$$

Haciendo estos últimos cómputos a mano (no son sino productos de números relativamente pequeños) se llega a 10099 como resultado final.

## 3ª Forma

El ejercicio puede ser resuelto de numerosas maneras alternativas distintas.

## 1. Método por ordenador

Con el siguiente código de *Mathematica*©, digo Python, podemos comprobar que en efecto es cierto para $x, y \leq 10\,000$, y como ese número es muy grande, el teorema ha de ser cierto por narices:

ISSN: 2952–0746; 10 de septiembre de 2025

## 2. Texto de ejemplo

Acá va un poco de «lorem ipsum» para que los resolutores no se queden solos en esta nueva página:

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.


Figura 2

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

A continuación, ponemos una referencia bibliográfica (véase Pérez-Beato Olivier, 1944, p.25).

Resuelto por Fulanito de Maracaibo y el proponente.

## Referencias

PÉREZ-BEATO OLIVIER, Manuel. (1944). *Manual-Formulario de Geometría Analítica*, S.A.E.T.A.